

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/56
20. 6. 1962.

G. Bologna: CALCOLI DI SEZIONI D'URTO PER BREMSSTRAH
LUNG LINEARMENTE POLARIZZATA IN CRISTALLI.

Nota interna: n° 146

Nota interna: n° 146

20 Giugno 1962.

G. Bologna: CALCOLI DI SEZIONI D'URTO PER BREMSSTRAHLUNG
LINEARMENTE POLARIZZATA IN CRISTALLI.

1. - Introduzione.

Nel presente lavoro useremo le seguenti unità:

Per le energie : $mc^2 = 0.510 \text{ MeV}$
(energia di riposo dell'elettrone);

Per gli impulsi : $mc = 0.510 \text{ MeV}/c$;

Per le lunghezze : (a meno che non venga detto il contra-
rio)

$$\lambda_c = \lambda_c / 2\pi$$

($\lambda_c = h/mc = 0.0243 \text{ \AA}$ lunghezza d'onda
Compton dell'elettrone).

E' stato mostrato da un gruppo di persone⁽¹⁾,
tra le quali l'autore della presente nota, che l'aspetto
interferenziale del fenomeno di bremsstrahlung in un mo-
nocristallo assume caratteristiche diverse da quelle pre-
viste da Uberall⁽²⁾, quando il minimo impulso di rinculo
del nucleo \mathcal{J} è molto minore dell'inverso del passo reti-
colare del cristallo.

Questo è, per esempio, il caso di fotoni di
200 MeV irradiati da elettroni di 1000 MeV in un bersa-
glio di diamante.

In questo caso bisogna tener conto della reale struttura discontinua dei piani del reticolo inverso, mentre da Uberall essi sono stati considerati come continui (approssimazione valida quando δ è dell'ordine dell'inverso del passo reticolare). In base a questa considerazione è stato possibile spiegare l'aspetto "quasi monocromatico" dello spettro di bremsstrahlung ottenuto da un cristallo di diamante con l'elettrosincrotrone di Frascati⁽³⁾.

Nasce poi il problema di calcolare la polarizzazione lineare del fascio di raggi χ .

Come vedremo in seguito, in un bersaglio "non cristallino" i fotoni irradiati da un fascio di elettroni di alta energia sono emessi di preferenza con polarizzazione parallela al piano individuato dalla direzione dell'elettrone primario e dall'impulso di rinculo del nucleo; il processo è però simmetrico intorno alla direzione dell'elettrone primario; cosicchè se si osserva l'intero fascio χ , questo ha polarizzazione in totale nulla. Diverso è il caso di un bersaglio monocristallino, dove l'impulso di rinculo del nucleo può assumere, come vedremo, solo determinate direzioni e grandezze; in tal modo, anche osservando l'intero cono di bremsstrahlung, rispetto ad un piano qualunque, i fotoni sono emessi preferenzialmente con un certo stato di polarizzazione lineare. Il calcolo della polarizzazione in cristalli fu affrontato inizialmente da Uberall⁽⁴⁾ con la stessa approssimazione dei piani reticolari continui di cui più sopra. Ci si è presentato dunque il problema di eseguire tale calcolo tenendo conto anche adesso della reale struttura cristallina.

Alcuni risultati numerici di questo calcolo sono già stati presentati in un lavoro citato⁽³⁾. Qui di seguito esporremo il metodo di calcolo da noi seguito, mentre un metodo alternativo è stato esposto altrove da Barbiellini⁽⁵⁾ e porta agli stessi risultati. Contemporaneamente ed indipendentemente i calcoli sono stati effettuati anche da Uberall⁽⁶⁾, con risultati in accordo ai nostri.

Come è noto⁽⁴⁾, la sezione d'urto differenziale per bremsstrahlung avente un certo stato di polarizzazione, in un cristallo, si ottiene moltiplicando quella di May⁽⁷⁾, relativa ad un solo atomo per il "fattore di diffrazione" del cristallo⁽²⁾; ne consegue che la parte coerente di tale sezione d'urto è diversa da zero solo quando l'impulso di rinculo del nucleo coincide con uno dei vettori del reticolo inverso del cristallo in questione. Ora la sezione d'urto di May è differenziale in quattro angoli (oltrechè naturalmente nell'energia dei fotoni). Perciò Diambriini suggerisce⁽⁸⁾ di trasformarla

in una sezione d'urto differenziale nelle tre componenti dell'impulso trasferito al nucleo (e nell'energia dei fotoni), integrando sull'angolo di emissione del fotone rispetto all'elettrone primario e riferendo la polarizzazione al piano individuato dalla direzione dell'elettrone primario e dell'impulso trasferito al nucleo.

In tal modo la parte coerente della sezione di urto per tutto il cristallo e per l'intero cono della bremsstrahlung, avente un certo stato di polarizzazione, si otterrà, a meno di una costante, sommando la sezione d'urto ottenuta, su tutti i punti del reticolo inverso.

2. - La sezione d'urto differenziale.

In approssimazione di Born, la sezione d'urto differenziale per bremsstrahlung da un solo atomo, linearmente polarizzata nella direzione $\vec{E} \perp \vec{k}$ è stata calcolata da May⁽⁷⁾ e, nelle approssimazioni di alte energie e piccoli angoli in cui ci porremo sempre nel seguito, si scrive

$$(1) \quad d\bar{\sigma}_p = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2} \frac{1}{(q^2 + a^2)^2} \frac{E_2}{E_1 k} \left[\frac{4E_1 E_2 \theta_2 \cos(\psi - \omega)}{1 + \theta_1^2 E_1^2} - \frac{4E_2 E_1^2 \theta_1 \omega \sin \psi}{1 + \theta_2^2 E_2^2} \right]^2 + \\ + k \int \frac{2 \left[4E_1 E_2 (\theta_1^2 \theta_2^2 + E_1^2 \theta_2^2 - 2E_1 E_2 \theta_1 \theta_2 \omega \sin \psi) \right]}{(1 + \theta_1^2 E_1^2)(1 + \theta_2^2 E_2^2)} \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \theta_2 d\theta_2 d\phi_2 dk$$

in cui:

$$\bar{\sigma} = Z^2/137 (e^2/mc^2)^2 = 0.5794 \times 10^{-27} Z^2 \text{ cm}^2$$

$$a = 111 Z^{-1/3} \quad \text{quantità caratteristica per una schermatura esponenziale}^{(9)}; \text{ rappresenta approssimativamente il raggio di schermo.}$$

$E_1, \vec{p}_1; E_2, \vec{p}_2; k, \vec{k}$ impulso ed energia dell'elettrone primario, di quello diffuso e del fotone emesso, rispettivamente.

$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{k}$ impulso di rinculo del nucleo.

$\theta_1 = \angle(\vec{p}_1, \vec{k}; \theta_2 = \angle(\vec{p}_2, \vec{k})$ angoli di emissione rispettivamente dell'elettrone primario e diffuso rispetto al fotone emesso.

$\phi_1 = \angle(\vec{p}_1, \vec{k})(\vec{b}_1, \vec{k}); \phi_2 = \angle(\vec{p}_2, \vec{k})(\vec{b}_1, \vec{k})$ rispettivamente azimuth dell'elettrone pri-

mario e diffuso, rispetto al piano dei vettori \vec{k} \vec{b}_1 , essendo, per ora, \vec{b}_1 un vettore arbitrario.

$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \angle(\vec{p}_2, \vec{k})(\vec{p}_1, \vec{k})$ azimut dell'elettrone diffuso rispetto all'elettrone incidente, con costola in \vec{k} .

$\omega = \angle(\vec{p}_1, \vec{k})(\vec{\varepsilon}, \vec{k})$ azimut dell'elettrone incidente rispetto al vettore di polarizzazione $\vec{\varepsilon}$, con costola in \vec{k} . Ai nostri effetti possiamo porre

$$\omega \simeq \angle(\vec{k}, \vec{p}_1)(\vec{\varepsilon}, \vec{p}_1)$$

in quanto $\theta_1 = \angle(\vec{p}_1, \vec{k})$ è supposto piccolo e la polarizzazione non è una funzione rapidamente variabile di ω . Cioè ω assume il significato di azimut del fotone rispetto ad $\vec{\varepsilon}$ con costola in \vec{p}_1 .

Per il seguito ci sarà utile definire anche i seguenti angoli:

$\theta_3 = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ angolo formato dai vettori \vec{p}_1 e \vec{p}_2

$\psi_1 = \angle(\vec{k}, \vec{p}_1)(\vec{b}_1, \vec{p}_1)$; $\psi_3 = \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_1)(\vec{b}_1, \vec{p}_1)$ rispettivamente azimut del fotone e dell'elettrone diffuso rispetto al piano dei vettori \vec{b}_1 e \vec{p}_1 (\vec{b}_1 per ora è sempre arbitrario).

$\psi = \psi_3 - \psi_1 = \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_1)(\vec{k}, \vec{p}_1)$ azimut dell'elettrone diffuso rispetto al fotone, con costola in \vec{p}_1 .

$\chi = \angle(\vec{q}, \vec{p}_1)(\vec{k}, \vec{p}_1)$ azimut dell'impulso di rinculo del nucleo \vec{q} rispetto al fotone, con costola in \vec{p}_1 .

$\gamma = \psi_1 + \chi = \angle(\vec{q}, \vec{p}_1)(\vec{b}_1, \vec{p}_1)$ azimut di \vec{q} rispetto al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) con costola in \vec{p}_1 .

Tutti gli angoli diedri definiti si intendono orientati.

Nella (1) si è tralasciato un termine trascurabile proporzionale a q^2 .

La (1) presenta l'inconveniente di assumere la direzione del fotone come asse di riferimento, mentre sperimentalmente ha senso prendere tale asse coincidente con la direzione dell'elettrone incidente \vec{p}_1 .

Si può introdurre tale asse come riferimento sostituendo agli elementi di angolo solido

$$\theta_1 d\theta_1 d\theta_1 \quad \text{e} \quad \theta_2 d\theta_2 d\theta_2$$

gli elementi di angolo solido attorno alla direzione del fotone emesso e dell'elettrone diffuso, cioè rispettivamente

$$\theta_1 d\theta_1 d\psi_1 \quad \text{e} \quad \theta_3 d\theta_3 d\psi_3$$

e tenendo conto delle relazioni(2)

$$\theta_2^2 = \theta_1^2 + \theta_3^2 - 2\theta_1\theta_3\cos\psi$$

$$\theta_2\cos\theta = \theta_1 - \theta_3\cos\psi$$

$$\theta_2\sin\theta = \theta_3\sin\psi$$

In tal modo tutti gli angoli che compaiono nella (1) sono legati alla direzione di \vec{p}_1 .

In base a quanto detto nel n° 1 si deve poi esprimere la (1) in funzione di θ_1 e delle componenti di \vec{q} o di tre variabili ad esse strettamente legate. E' conveniente scegliere queste variabili come q_z, q_1, ψ essendo q_z e q_1 le componenti di \vec{q} rispettivamente parallela e perpendicolare a \vec{p}_1 ; ed essendo ψ il già definito azimut di \vec{q} ; tramite queste variabili si possono eliminare facilmente le variabili θ_3 e ψ , mediante le relazioni(2)

$$v^2 = 2E_2(q_z - \delta) - (E_2/k)u^2$$

$$uv\cos\psi = (1/2)(q^2 - u^2 - v^2) =$$

$$= (1/2)\left[q_1^2 - 2E_2(q_z - \delta) + \frac{(E_2-1)}{k}u^2\right]$$

avendo posto

$$u = \theta_1 k$$

$$v = \theta_3 E_2$$

ed essendo

$$(2) \quad \int = \frac{k}{2E_1 E_2}$$

il minimo impulso trasferito al nucleo.

La variabile ω si elimina facilmente nei due casi particolari che ci interessano in cui si vuol calcolare la sezione d'urto per fotoni polarizzati parallelamente o perpendicolarmente al piano (\vec{q}, \vec{p}_1) determinato dalla direzione dell'elettrone incidente e dalla direzione dell'impulso di rinculo del nucleo, cioè rispettivamente:

$$d\sigma_{\parallel} \vec{q}\vec{p}_1 = d\sigma_p(\omega = -\chi) \quad \text{oppure} = d\sigma_p(\omega = \pi - \chi)$$

$$d\sigma_{\perp} \vec{q}\vec{p}_1 = d\sigma_p(\omega = \frac{\pi}{2} - \chi)$$

Ora la variabile χ si esprime mediante le relazioni

$$\sin \chi = \frac{v}{q_1} \sin \psi$$

$$\cos \chi = \frac{u + v \cos \psi}{q_1}$$

per cui si ottiene in definitiva, dopo passaggi alquanto laboriosi

$$d^5\sigma_{\parallel} \vec{q}\vec{p}_1 = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2} \frac{1}{2ER^3} \frac{1}{(p^2 + q^2)^2} \frac{1}{(au^4 + bu^2 + c)^{1/2}}$$

$$(3) \quad \left\{ \frac{E_1^2}{8q_1^2} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{E_1}{R} u^2 - 2E_2(q_2 - \delta) - \frac{R - E_2}{E_1} q_1^2 \right) + \left(\frac{E_1}{R} u^2 - 2E_2(q_2 - \delta) + q_1^2 \right) \right]^2 + \frac{4E_1^2 E_2^2 q_1^2}{(R^2 + E_1^2 u^2) E} \right\} du^2 dq_2 dy_2^2 d\psi dk$$

$$d^5\sigma_{\perp} \vec{q}\vec{p}_1 = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2} \frac{1}{2E_1 k^3} \frac{1}{(b^2 + q^2)^2} \frac{1}{(au^4 + bu^2 + c)^{1/2}}$$

$$(4) \quad \left\{ \frac{E_1^2}{8q_1^2} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{R^2}{R^2 + E_1^2 u^2} \right) (au^4 + bu^2 + c)^{1/2} \right]^2 + \frac{4E_1^2 E_2^2 q_1^2}{(R^2 + E_1^2 u^2) E} \right\} du^2 dq_2 dy_2^2 d\psi dk$$

avendo posto

$$a = - E_1^2 / k^2 < 0$$

$$b = 2 \left[\frac{E}{c} + (q_1^2 - 1) \right]$$

$$c = - \left[2E_2 (q_2 - \delta) \right]^2 < 0$$

ove

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = q_z - (q_1^2 / 2E_1) > \delta \\ \eta = q_z - (q_1^2 / 2E_2) \end{cases}$$

Per esprimere l'elemento differenziale nelle nuove variabili si è dovuto calcolare lo Jacobiano

$$J = \left| \frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \psi, \varphi)}{\partial(u, v, \rho, \varphi)} \right| = \frac{1}{4Ruv \sin \psi}$$

$$= \frac{1}{2Ruv (au^4 + bu^2 + c)^{1/2}}$$

Come detto nel n° 1, si tratta ora di integrare le (3), (4) rispetto a θ_1 , ovvero sia u . Giacchè u compare solo tramite le potenze di u^2 , è conveniente integrare rispetto a u^2 . L'integrazione si effettua facilmente operando la seguente trasformazione di variabili, che ci è suggerita dalla forma della (3):

$$z = (E_1/k)u^2 - 2E_2(q_z - \delta) - \frac{k - E_2}{E_1} q_1^2$$

In tal modo si ha

$$au^4 + bu^2 + c = l^2 - z^2$$

avendo posto

$$l^2 = 16E_2^2 \delta q^2 (\xi - \delta) > 0$$

l^2 è effettivamente un numero positivo in quanto, per ragioni cinematiche è verificata la disuguaglianza della prima delle (5). I limiti di integrazione su z sono $-|l|$ e $+|l|$, in modo che il radicando che compare nelle (3), (4) sia sempre positivo.

Posto poi

$$m = 2E_2(\xi + \delta q_1^2),$$

per calcolare alcuni integrali si deve operare l'ulteriore trasformazione

$$t = z + m$$

Ad integrazione effettuata, si ottiene in definitiva

$$(6) \quad R d^4 S = R (d^4 S_{\rho_1} + d^4 S_{\rho_2}) = \frac{\delta}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + q^2)^2} \frac{k}{E_1^2}$$

$$\left\{ -\frac{1}{E^2} + \frac{(1+\delta)q_1^2 + 2}{2E\sqrt{q_1^2 + 4\delta^2 q_2^2}} - \frac{\xi + \delta q_1^2}{V(q_1^2 + 4\delta^2 q_2^2)^2} \right\} dq_z dq_1^2 dq_2^2 dk$$

$$(7) \quad k(d^4 G_{\perp} \vec{q}_1 - d^4 G_{\parallel} \vec{q}_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{1}{E_1} \left\{ 3 \sqrt{\frac{q_1^2}{q^2 + 4\delta^2 q_1^2}} - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{4\delta^2 q_1^2}{\varepsilon \sqrt{q^2 + 4\delta^2 q_1^2}} + \frac{2\delta^2 q_1^2 (E + \delta q_1)}{\sqrt{(q^2 + 4\delta^2 q_1^2)^3}} \} dq_1 dq_2^2 d\gamma dk.$$

$d^4 G$ si poteva evidentemente ottenere direttamente anche partendo dalla sezione d'urto differenziale di Bethe e Heitler. Non abbiamo dato separatamente le sezioni d'urto \parallel e \perp in quanto a noi interessa calcolare la polarizzazione, che è definita appunto tramite le (6) e (7).

Le (6) e (7) non si prestano per il calcolo numerico in quanto si compongono di termini che si eliminano a vicenda fino ad un elevato numero di cifre decimali. Si tratta allora di effettuare su di esse alcune trasformazioni algebriche ed alcuni sviluppi in serie: come vedremo in seguito, valori di $q_1 \approx 10^{-1}$ non hanno importanza, e poichè si ha $q_1 \approx \sqrt{2}$, si può considerare $q_1^2/2E_1$ e $q_1^2/2E_2$ piccoli rispetto a q_2 . Perciò si possono sviluppare in serie fino al 1° ordine $1/\varepsilon$, $1/n$, e le loro potenze e analogamente si può sviluppare in serie fino al 1° ordine la radice che compare nelle (6), (7). In definitiva si può scrivere

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} k d^4 \sigma = k(d^4 G_{\perp} \vec{q}_1 + d^4 G_{\parallel} \vec{q}_1) &= \bar{\sigma} \left\{ [1 + (1-x)^4] F_1 - \frac{2}{3}(1-x) F_2 \right\} dq_1 dq_2^2 d\gamma dk \\ k(d^4 G_{\perp} \vec{q}_1 - d^4 G_{\parallel} \vec{q}_1) &= \bar{\sigma} \cdot 2(1-x) F_3 dq_1 dq_2^2 d\gamma dk \end{aligned} \right.$$

avendo posto $x = k/E_1$

$$(9) \quad \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{\delta^2 q_1^2}{q_1^2} \\ F_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{6\delta^2 q_1^2}{q_1^2} (q_2 - \delta) \\ F_3 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \frac{\delta^2 q_1^2}{q_1^2} \end{aligned}$$

Poichè F_3 è sempre negativa, si vede dalla seconda delle (8) che $d^4 G_{\perp} \vec{q}_1$ è maggiore di $d^4 G_{\parallel} \vec{q}_1$; rimane così provata l'affermazione fatta al n° 1 che i fotoni vengono emessi preferenzialmente con polarizzazione parallela al piano (\vec{q}, \vec{p}_1) .

3. - La polarizzazione da cristalli.

Si tratta ora di moltiplicare le (8) per il fattore di diffrazione del cristallo ed integrare rispetto alle variabili spaziali.

Indichiamo con \vec{a}_j ($j = 1, 2, 3$) gli assi di riferimento ortogonali del reticolo diretto e con b_j gli assi, rispettivamente ad essi paralleli, del reticolo inverso; indichiamo poi con $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ un generico vettore del reticolo inverso, per il quale poniamo

$$g_j = \frac{2\pi}{a_j} h_j \quad (h_j \text{ intero})$$

essendo a_j il passo reticolare lungo l'asse \vec{a}_j .

Il fattore di diffrazione è stato dato da Uberall⁽²⁾ per reticoli cubici e si scrive in generale

$$(10) \quad \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 N_1 N_2 N_3 \sum_{\vec{g}} e^{-Aq^2} \delta(\vec{q} - \vec{g}) + N(1 - e^{-Aq^2})$$

dove a rappresenta lo spigolo della cubica fondamentale, N_j il numero di celle del cristallo lungo l'asse \vec{a}_j , N il numero di atomi del cristallo, ed S il fattore di struttura di Bragg⁽¹⁰⁾;

e^{-Aq^2} tiene conto delle vibrazioni termiche del reticolo: A rappresenta lo spostamento quadrato medio di un atomo dalla posizione di equilibrio ed è stato definito da Uberall⁽²⁾; infine $\delta(\vec{q} - \vec{g})$ rappresenta la funzione di Dirac dell'argomento $\vec{q} - \vec{g}$:

$$(11) \quad \delta(\vec{q} - \vec{g}) = \delta(q_1 - g_1) \delta(q_2 - g_2) \delta(q_3 - g_3)$$

(q_j sono le proiezioni di \vec{q} su b_j^*).

Come si vede, nella (10) è contenuta una somma su tutti i vettori \vec{g} del reticolo inverso; questo comporta che non si può continuare a riferire la polarizzazione al piano (\vec{q}, \vec{p}_1) . Infatti la polarizzazione è definita nel modo usuale

$$(12) \quad P = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma_{\perp} + d\sigma_{\parallel}}$$

essendo $d\sigma_{\perp}$ e $d\sigma_{\parallel}$ le sezioni d'urto (differenziali solo in energia) per tutto il cristallo e per emissione di fotoni con polarizzazione rispettivamente perpendicolare e parallela ad un piano fisso; sceglieremo questo coincidente col piano (b_1, \vec{p}_1) individuato dalla direzione dell'elettrone primario e dell'asse cristallino b_1 .

Per ottenere la (12) bisogna dunque moltiplicare la prima delle (8) per la (10), e la seconda delle (8) per la (10) e per il coseno del doppio dell'angolo diedro

formato dai piani (\vec{q}, \vec{p}_1) e (\vec{b}_1, \vec{p}_1) (11), cioè (ricordando la definizione di ψ data all'inizio del n° 2 e specializzando il vettore arbitrario colà definito in uno degli assi del reticolo inverso), per $\cos 2\gamma$.

Così facendo il primo termine della (10) dà luogo ad un contributo "coerente", mentre il secondo dà luogo ad un contributo "continuo" od "incoerente"; quest'ultimo è nullo per quanto riguarda la seconda delle (8), in quanto si deve integrare $\cos 2\gamma$ da 0 a π .

Dalla (10) risulta che la parte coerente è, come già affermato al n° 1, diversa da zero solo quando l'impulso di rinculo del nucleo, supposto rappresentato nello spazio del reticolo inverso coincide con uno dei vettori di detto reticolo. Fisicamente ciò significa che la parte coerente si ottiene sommando i contributi di ciascun punto del reticolo. Da un punto di vista matematico ciò equivale ad integrare su q_z, q_x, γ sfruttando una proprietà caratteristica delle funzioni di Dirac.

Definiamo ora l'intensità della bremsstrahlung al seguente modo

$$(13) \quad I = \frac{k d \delta}{N^2 dR}$$

con $d\delta = d\delta_z + d\delta_{||}$, ed analogamente per $I_{||}$ ed I_{\perp} .

La polarizzazione riferita al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) è data dunque, indicando rispettivamente con gli indici i e c rispettivamente i contributi coerenti e continui, da:

$$(14) \quad P = \frac{I_{\perp}^{(c)} - I_{||}^{(c)}}{I_{\perp}^{(c)} + I_{||}^{(c)}}$$

dove

$$(15) \quad \begin{aligned} I_{\perp}^{(i)} - I_{||}^{(i)} &= 2(1-x) \gamma_3^{(i)} \\ I^{(i)} &= I_{\perp}^{(i)} + I_{||}^{(i)} = \\ &= [1 + (1-x)^2] \gamma_3^{(i)} - \frac{2}{3}(1-x) \gamma_2^{(i)} \end{aligned}$$

essendo, per le (9), (10)

$$(16) \quad \begin{cases} \gamma_1^{(i)} = \frac{(2\pi)^2 N_1 N_2 N_3}{a^3 N} \sum_{\vec{q}, \vec{q}_2} |s|^2 \frac{e^{-Aq^2}}{(b^2 + q^2)^2} \frac{q_2^2}{q^2} \delta(\vec{q} - \vec{q}_2) dq_2 dq_2^2 d\gamma \\ \gamma_2^{(i)} = \frac{(2\pi)^2 N_1 N_2 N_3}{a^3 N} \sum_{\vec{q}, \vec{q}_2} |s|^2 \frac{e^{-Aq^2}}{(b^2 + q^2)^2} \frac{65q_2^2(q_2 - D)}{q^2} \delta(\vec{q} - \vec{q}_2) dq_2 dq_2^2 d\gamma \\ \gamma_3^{(i)} = \frac{(2\pi)^2 N_1 N_2 N_3}{a^3 N} \sum_{\vec{q}, \vec{q}_2} |s|^2 \frac{e^{-Aq^2}}{(b^2 + q^2)^2} \frac{q_2^2}{q^2} (2\cos^2 \gamma - 1) \delta(\vec{q} - \vec{q}_2) dq_2 dq_2^2 d\gamma \end{cases}$$

Nella (14) $I(c)$ è data dalla seconda delle (15) dove però al posto di $\Psi^{(i)}$ si introducono le funzioni $\Psi_{1,2}^{(c)}$, calcolate da Uberall(2).

Per schermatura completa ($\delta\beta \ll 1$) si ha

$$(17) \quad \begin{cases} \Psi_1^{(c)} = 2[2lu\beta + (1-D)e^D E_1(-D) + 2] \\ \Psi_2^{(c)} = 2[2lu\beta + (1+D)e^D E_1(-D) + 7/3] \\ D = A/\beta, \quad E_1(-D) = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \end{cases}$$

Giunti a questo punto faremo l'ipotesi semplificatrice che l'impulso dell'elettrone primario \vec{p}_1 appartenga al piano individuato dai due assi \vec{b}_1, \vec{b}_2 (od \vec{a}_1, \vec{a}_2) e scriveremo $\vec{p}_1 \in (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Questa ipotesi non costituisce una seria limitazione alla generalità, perchè sperimentalmente ci si può sempre ridurre a questo caso. Indichiamo poi con θ l'angolo formato da \vec{b}_1 e \vec{p}_1 (od \vec{a}_1):

$$\theta = \angle \vec{b}_1, \vec{p}_1 .$$

Quest'angolo gioca un ruolo importantissimo in quel che segue ed è sempre molto piccolo (< 0.05 mrad)⁽²⁹⁾.

Dalla fig. 1 si ottiene, per piccoli valori di θ :

$$(18) \quad \begin{cases} q_z \approx q_1 + \theta q_2 \\ q_1^2 \approx q_2^2 + q_3^2 \\ \cos \psi \approx q_2/q_1 \end{cases}$$

In quel che segue porremo

$$g_1 = 0 \quad (\text{ovvero } h_1 = 0)$$

cioè prenderemo in considerazione solo quei punti del reticolo inverso giacenti nel piano dei due assi \vec{b}_2, \vec{b}_3 . Gli altri piani reticolari hanno poca importanza, in quanto ad essi corrispondono valori di q tali che il fattore e^{-Aq^2} della (10) riduce la sezione d'urto ad essere trascurabile⁽²⁾, in quantochè A ha valori dell'ordine di $100 + 200$. È sempre a causa della presenza di questo fattore che nel n° 2 abbiamo assunto sempre $q \approx 10^{-1}$.

Dalle (18) si ha⁽¹²⁾

$$f(q_1) = f(q_z - \theta q_1 \cos \psi)$$

$$\delta(q_2 - g_2) = \frac{\delta(p - \cos^{-1}(g_2/g_1)) + \delta(p + \cos^{-1}(g_2/g_1))}{\sqrt{g_1^2 - g_2^2}}$$

$$\delta(q_3 - g_3) = 2\sqrt{g_1^2 - g_2^2} \delta(g_1^2 - (g_2^2 + g_3^2))$$

Tenuto conto che nelle (16) ψ compare solo come argomento del coseno in $\psi_3^{(1)}$, possiamo scrivere in definitiva

$$\delta(q_1) \delta(q_2 - g_2) \delta(q_3 - g_3) =$$

$$= 4\delta(g_1 - g_2) \delta(g_1^2 - (g_2^2 + g_3^2)) \delta(p - \cos^{-1} \frac{g_2}{g_1})$$

Ora che le variabili di integrazione sono direttamente negli argomenti delle funzioni di Dirac, le integrazioni che compaiono nelle (16) si effettuano in modo immediato⁽¹³⁾ semplicemente operando le sostituzioni

$$q_2 \rightarrow g_2 \theta$$

$$q^2 \rightarrow g_2^2 + g_3^2 = g^2$$

$$\cos \psi \rightarrow g_2 / \sqrt{g_2^2 + g_3^2}$$

e moltiplicando il risultato per 4.

Si ha quindi in definitiva, confondendo⁽²⁾ q^2 con q_1^2

$$\chi_1^0(\gamma) = \delta\psi_1^0 = 4 \frac{N_1 N_2 N_3}{N} \frac{(2\pi)^2}{a^3} \sum_{g_2, g_3} |s|^2 \frac{e^{-A g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{g^2}{g_2^2 \gamma^2}$$

$$(19) \quad \chi_2^0(\gamma) = \delta\psi_2^0 = 24 \frac{N_1 N_2 N_3}{N} \frac{(2\pi)^2}{a^3} \sum_{g_2, g_3} |s|^2 \frac{e^{-A g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{g^2}{g_2^2 \gamma^4} (g^2 \gamma - 1)$$

$$\chi_3^0(\gamma) = \delta\psi_3^0 = -4 \frac{N_1 N_2 N_3}{N} \frac{(2\pi)^2}{a^3} \sum_{g_2, g_3} |s|^2 \frac{e^{-A g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{g_2^2 - g_3^2}{g_2^4 \gamma^4}$$

dove

$$\gamma = \theta / \beta$$

e dove l'indice 0 sta ad indicare il contributo coerente dei soli punti del piano $h_1 = 0$ passante per l'origine.

Le sommatorie che compaiono nelle (19) devono essere fatte rispettando la condizione data dalla prima delle (5), che ora diventa

$$g_2 > \frac{1}{\gamma} + \frac{g^2}{2E_0} \approx \frac{1}{\gamma}$$

Nelle figure seguenti presentiamo alcuni risultati di calcoli numerici (effettuati col calcolatore IBM

1620) relativi al diamante a temperatura ambiente $T = 293^\circ\text{K}$. Si suppone che l'elettrone incida all'angolo θ con l'asse $[110]$ e la sua direzione di incidenza sia parallela al piano degli assi $[110]$, $[001]$:

$$\vec{p}_1 \leftarrow [110] [001]$$

Il fattore di struttura si scrive (14)

$$(20) \quad S = \frac{[1 + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_1+h_3)}]}{[1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)}]}$$

mentre si ha:

$$N_1 N_2 N_3 / N = 1/8$$

$$A = 126$$

$$a = 147$$

$$\beta = 61.1$$

La struttura del piano reticolare inverso $h_1 = 0$, determinato dagli assi $b_2 = [1\bar{1}0]$ e $b_3 = [001]$, è rappresentata nella fig. 2. Dalla (20) si ottiene $|S|^2 = 64$ per i punti racchiusi in un circoletto ed $|S|^2 = 32$ per gli altri. I punti che mancano nella fig. 2, per costituire una struttura periodica rettangolare di passi $2\pi/a$, $\sqrt{2} 2\pi/a$, hanno evidentemente $|S|^2 = 0$.

Nella fig. 3 sono rappresentate, in funzione di x sia l'intensità della bremsstrahlung $I(x, \theta, E_1) = I(i) + I(c)$ che la polarizzazione $P(x, \theta, E_1)$, riferita al piano (\vec{b}_1, \vec{p}_1) , ottenute dalle (15) con le (17) e (19). Le funzioni sono state calcolate per $E_1 = 2 \times 10^3$ e $\theta = 6.58 \times 10^{-3}$ rad, in modo che la prima "riga" dello spettro si abbia per $x = 0.15$.

Come si vede, con un cristallo come bersaglio, si è ottenuto uno spettro di bremsstrahlung a "righe" e per di più queste righe hanno una notevole polarizzazione.

Per quanto riguarda il confronto dei risultati ottenuti con l'esperienza rimandiamo ad un lavoro già citato (3).

Ringrazio il Sig. G. Tonna per l'aiuto prestato nello sviluppo di alcuni formalismi algebrici.

Bibliografia.

- (1) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri, G.P. Murtas: Phys. Rev. Letters 8, 112 (1962).
- (2) - H. Überall, Phys. Rev. 103, 1055 (1956)
- (3) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri, G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters, 8, 454 (1962).
- (4) - H. Überall, Phys. Rev. 107, 223 (1957).
- (5) - G. Barbiellini, Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-62/49 (giugno 1962)
- (6) - H. Überall, Zert. f. Naturforschung, 17, 332 (1962).
- (7) - M. May, Phys. Rev. 84, 265 (1951).
- (8) - G. Diambri, Laboratori Nazionali di Frascati, nota interna di prossima pubblicazione.
- (9) - L.I. Schiff, Phys. Rev. 83, 252 (1951)
- (10) - J. Bouman, Hand. der Physik, (Springer Verlag, Berlin 1957) vol. 32, pg. 97).
- (11) - W.H. Mac Master, Am. J. Phys. 22, 351 (1954)
- (12) - L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum mechanics (Pergamon Press, London 1958), pag. 18.
- (13) - L.I. Schiff; Meccanica quantistica (Einaudi 1952), pag. 93.
- (14) - J.M. Bijvoet, N.H. Kolkmeier, C.H. MacGillavry: X-ray analysis of crystals (Butterworth 1951), pagg. 64 e 239.

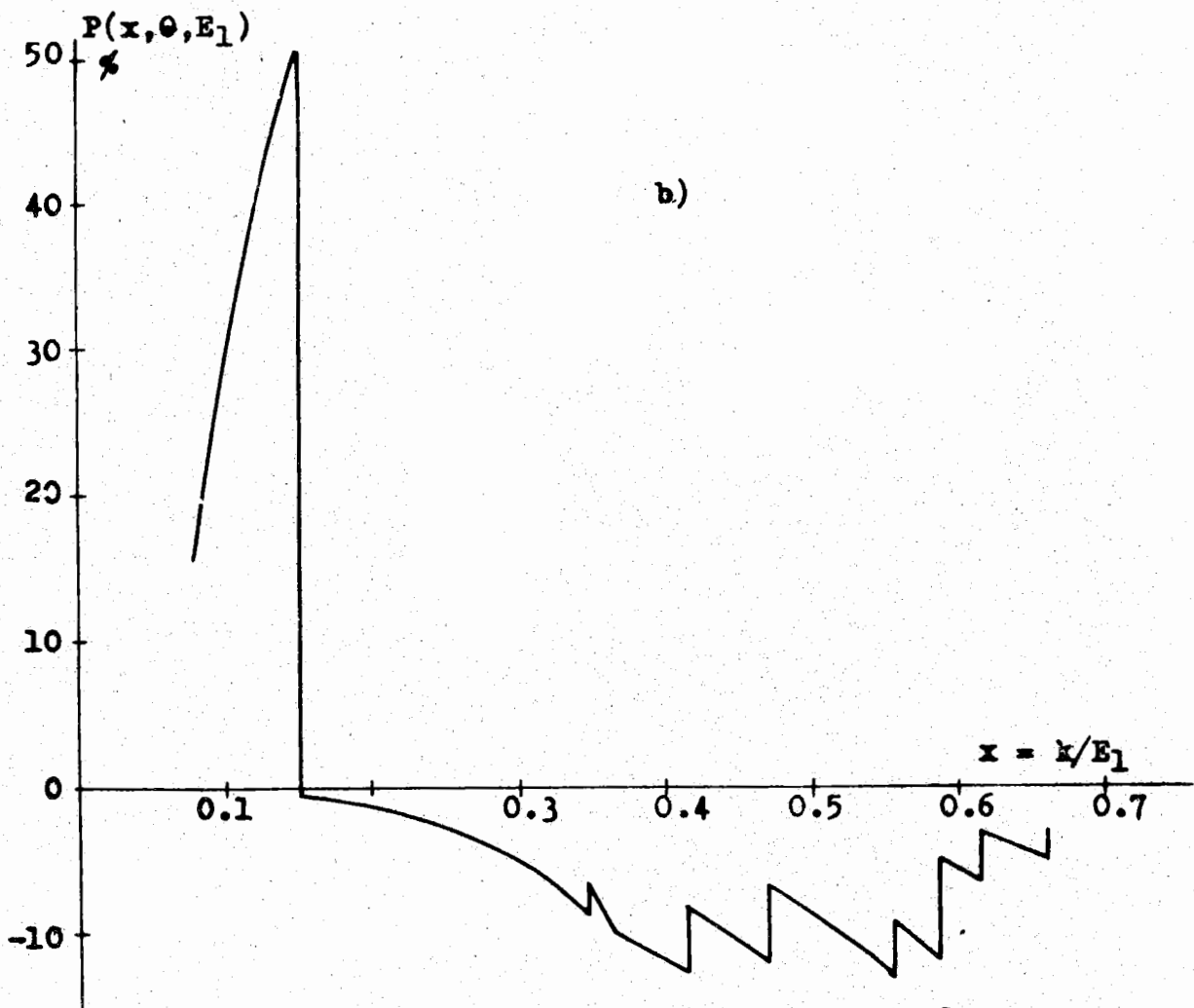
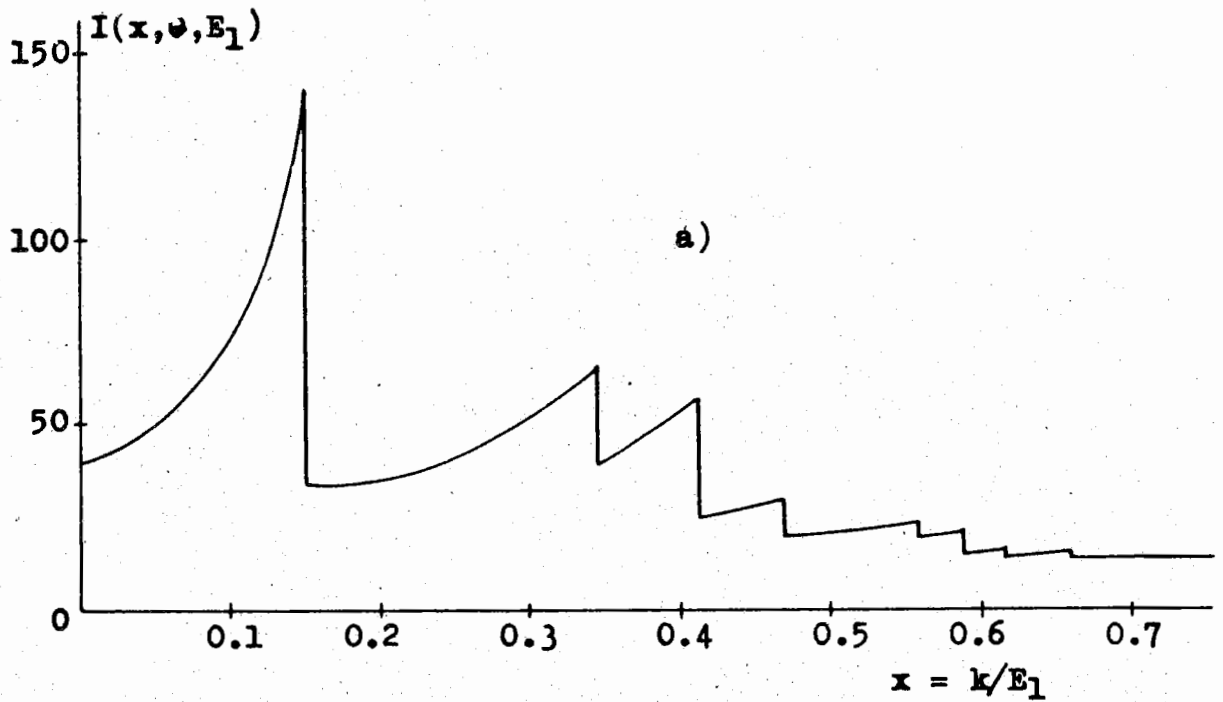


FIG. 3 - a) Rappresentazione della intensità della bremsstrahlung $I(x, \theta, E_1)$ e, b) della polarizzazione $P(x, \theta, E_1)$ riferita al piano (\vec{P}_1, \vec{b}_1) , in funzione di $x = k/E_1$.
 Caso del diamante a temperatura ambiente $T=293^\circ\text{K}$, per $E_1=2 \times 10^3$, $\vec{P}_1 \in [110]$, $[001]$, $\theta=6.58$ mrad.
 $I=I^{(1)}+I^{(e)}=kds/E\bar{\sigma}dk$; $P=[I_1^{(1)}-I_n^{(1)}/I_1^{(1)}+I^{(e)}] \vec{b}_1 \vec{P}_1$

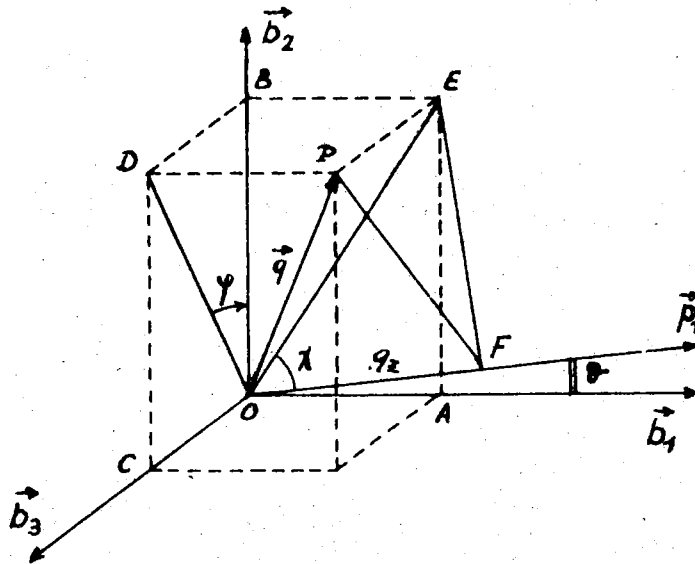


FIG. 1 - Rappresentazione di \vec{q} e \vec{P}_1 nello spazio del reticolo inverso. $\vec{P}_1 \in (b_1, b_2)$
 $OP = \vec{q}$; $OA = q_1$; $OB = q_2$; $OC = q_3$;
 $OD \approx q$; $OE = q_2$; $\theta = \angle \vec{P}_1, b_1$;
 $\gamma = (\vec{q}, \vec{P}_1)(b_1, \vec{P}_1)$; $\lambda = \angle OE, \vec{P}_1$;
 $\cos \lambda \approx (q_1 / \overline{OE}) + (\theta q_2 / \overline{OE})$.

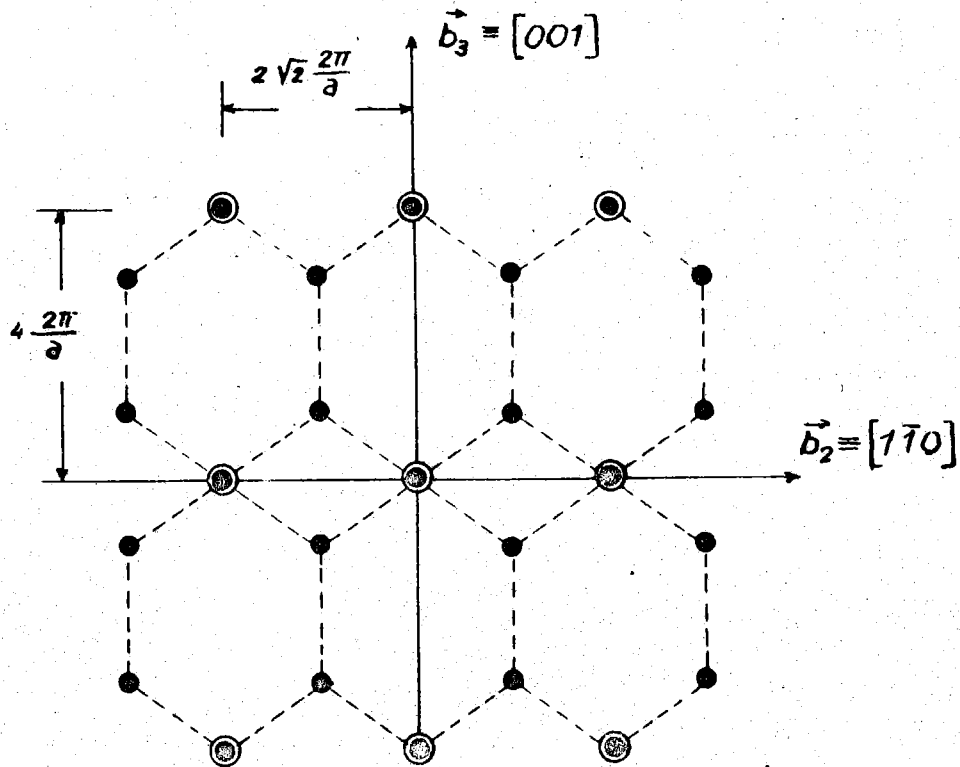


FIG. 2 - Struttura del piano reticolare inverso passante per l'origine ($h_1=0$) e perpendicolare all'asse $[110]$. Per i punti racchiusi nel circoletto si ha $|S|^2 = 64$, per gli altri $|S|^2 = 32$
 (S è il fattore di struttura di Bragg)